DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA RIJEKA
NATJECATELJSKI ODBOR

NATJECANJE DMF-a U MATEMATICI
23.05.2007. – 06.06.2007.
ZADACI ZA STUDENTE

Zadatak 1. Neka je $p \in \mathbb{N}$ prost. Dokažite da p^3 dijeli $\binom{2p}{p} - 2$.

Zadatak 2. Neka je $P(x, y)$ polinom stupnja m u varijabli x i stupnja n u varijabli y. Dokažite da $P(x, e^x) = 0$ ima najviše $m + n + mn$ rješenja u skupu realnih brojeva.

Zadatak 3. Neka su A i B realne kvadratne matrice reda n takve da vrijedi $A^2 + B^2 = AB$. Ako je $AB - BA$ invertibilna matrica dokažite da je n djeljiv s 3.

Zadatak 4. Neka je $f \in C[0, \infty\rangle$ i

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \int_0^x f^2(t)dt = 1\,.$$

Dokažite da je

$$f(x) \sim \frac{1}{(3x)^{1/3}} \qquad (x \to \infty).$$

Zadatak 5. Neka je X slučajna varijabla za koju vrijedi $\mathbb{P}\{0 \leq X \leq M\} = 1$. Dokažite da je

$$\mathbb{D}X \leq \frac{M^2}{4}\,.$$

Kada nastupa jednakost?

Zadatak 6. Neka su $a, b > 0$. Definirajmo:

$$a_1 := a, \quad b_1 := b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n^2} \qquad (n \geq 1)\,.$$

Jesu li nizovi (a_n) i (b_n) konvergentni?

Zadatak 7. Neka je $B = \{n \in \mathbb{N} \colon n$ ne sadrži znamenku 3 u svom dekadskom zapisu$\}$. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n\in B} \frac{1}{n}.$$

Zadatak 8. Neka je A 3×3 matrica čiji su svi elementi jednaki 1 ili -1. Dokažite da je $\det A$ paran broj i nađite njegovu maksimalnu vrijednost.

Zadatak 9. Dokažite tvrdnju: Ako je $\mathcal{C}$ samokomplementarni i samoortogonalni binarni linearni kôd, onda je $\mathcal{C}$ paran.

Zadatak 10. Neka je $N \lhd G \leq S(X)$, pri čemu je X konačan skup. Dokažite tvrdnju:
Ako je $x' \in G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$, za neki $x \in X$, onda je $|N(x')| = |N(x)|$.