DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA RIJEKA
NATJECATELJSKI ODBOR

NATJECANJE DMF-a U MATEMATICI
17.11.2008. – 02.12.2008.
ZADACI ZA STUDENTE

Zadatak 1. Odredite limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}.$$

Zadatak 2. Neka je $f \in C^2([-1,1])$. Dokažite da je red

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

konvergentan ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big| f\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big| < \infty.$$

Zadatak 3. Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokažite da postoji $c \in \langle 0,1\rangle$ takav da vrijedi

$$\int_0^c f(x)dx = (1-c)f(c).$$

Zadatak 4. Dokažite jednakost

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{n})} = \frac{n^2-1}{3}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 5. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ aritmetički niz s pozitivnim članovima i razlikom d te neka je $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{a_1^2 + x^2 + \frac{d^2}{2} - a_1 d} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n d}{(a_n^2 + x^2)^2} < \frac{1}{a_1^2 + x^2 - a_1 d}.$$

Zadatak 6. Neka je $*$ binarna operacija na skupu S za koju postoji neutralni element $e \in S$ i za svaki $a \in S$ postoji jedinstveni inverz a^{-1}. Mora li $*$ biti asocijativna?

Zadatak 7. Označimo s P_0 jednakostranični trokut stranice 1. Induktivno konstruiramo niz konveksnih poligona na sljedeći način: Vrhovi od P_{n+1} su točke koje svaku stranicu od P_n dijele na tri jednaka dijela. Označimo sa $S(P_n)$ površinu od P_n. Nađite

$$\lim_{n\to\infty} S(P_n).$$

Zadatak 8. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ različiti realni brojevi i neka je $A = (a_{ij})$ matrica s elementima $a_{ij} = e^{-(x_i - x_j)^2}$. Dokažite da je A pozitivno definitna.

Zadatak 9. Dokažite nejednakost

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\Gamma(t)\,dt \geq \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\Gamma\Big(\frac{a}{a+b}\Big), \qquad a, b > 0,$$

gdje je s Γ označena Eulerova gama funkcija.

Zadatak 10. Vjerojatnost da se na drvetu jabuke nalazi m cvjetova iznosi $p^m(1-p)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Svaki cvijet prerasta nezavisno od drugih u zrelu jabuku s vjerojatnošću α. Ako je na drvetu r jabuka, kolika je vjerojatnost da je prvobitno bilo n cvjetova?

Eventualna pitanja u vezi formulacije zadataka možete poslati na adresu `dmf.matematika@gmail.com`.