

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA RIJEKA
NATJECATELJSKI ODBOR

NATJECANJE DMF-a U MATEMATICI
23.05.2007. – 06.06.2007.
ZADACI ZA SREDNJOŠKOLCE

Zadatak 1. Zapis nekog cijelog broja dekadskom sustavu sastoji se od 300 jedinica i 150 dvojki. Može li on biti potpun kvadrat?

Zadatak 2. Djelomično pokvareni prekidač u prosjeku svaki 12. put uključuje rasvjetu. Kolika je vjerojatnost da će se rasvjeta uključiti na treći pokušaj? A tri puta uzastopno?

Zadatak 3. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}{abc}}.$$

Zadatak 4. ABC je jednakokrani trokut ($AB = AC$). Neka je D točka na stranici AC takva da je $DC = 2AD$. Neka je P točka na dužini BD takva da je kut $\angle APC$ pravi. Dokažite da vrijedi $\angle ABD = \angle BCP$.

Zadatak 5. Neka je d_n broj jedinica u binarnom prikazu prirodnog broja n . Pronađite najveći prirodan broj p takav da 2^p dijeli $n!$.

Zadatak 6. Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $1 + n + n^2 + n^3 + n^4$ kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 7. Neka je $S = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$ i neka je $f: S \rightarrow S$ dana s $f(x) = x - 1/x$. Dokažite da je

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(S) = \emptyset.$$

$$(f^k(S) = f(f(f \dots f(S))) = \{f(f(f \dots f(x))) : x \in S\})$$

Zadatak 8. Dvorac ima oblik jednakostraničnog trokuta stranice duljine 100 m. On je podijeljen na 100 trokutastih dvorana čije stranice imaju duljinu 10 m. Na sredini svakog zida između dvorana napravljena su vrata. Koliko najviše dvorana može razgledati čovjek po dvorcu prolazeći kroz svaku dvoranu najviše jednom?

Zadatak 9. Neka su x_j pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1.$$

Nađite ekstremne vrijednosti sume

$$\sum_{j=1}^n x_j x_{j+1} \quad (x_{n+1} \equiv x_1).$$

Zadatak 10. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ označimo sa x_n zbroj znamenaka broja $[an + b]$ u njegovom dekadskom prikazu. Pokažite da niz (x_n) sadrži konstantan podniz.