

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA RIJEKA
NATJECATELJSKI ODBOR

NATJECANJE DMF-a U MATEMATICI
17.11.2008. – 02.12.2008.
ZADACI ZA SREDNJOŠKOLCE

Zadatak 1. Na papiru je zapisano $n^2 + 1$ različitih prirodnih brojeva. Pokažite da je među njima moguće izbrisati $n^2 - n$ brojeva tako da je preostalih $n + 1$ zapisano u rastućem ili padajućem poretku.

Zadatak 2. Neka je P polinom s realnim koeficijentima takav da su sve njegove nultočke (realne i kompleksne) po apsolutnoj vrijednosti veće ili jednake 1. Ako znamo da je $P(0) = -1$ koje sve vrijednosti može imati $P(1)$?

Zadatak 3. Neka je $f(a, b, c, d) = (ab, bc, cd, da)$. Pronađite sve četvorke (a, b, c, d) realnih brojeva za koje postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$f^k(a, b, c, d) = \underbrace{f(f(\dots f(f(a, b, c, d)) \dots))}_{k \text{ puta}} = (a, b, c, d).$$

Zadatak 4. Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da vrijedi

$$(8 + 5\sqrt{2})^m = (9 + 4\sqrt{2})^n.$$

Zadatak 5. Neka u trokutu ABC vrijedi $|AC| > |BC|$. Opišimo mu kružnicu i na njoj uočimo polovište luka ACB te ga označimo s P . Neka je D nožište okomice iz P povučene na \overline{AC} . Dokažite da je $|AD| = |DC| + |CB|$.

Zadatak 6. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(x)f(yf(x) - 1) = x^2 f(y) - f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 7. Neka su a_1, a_2, \dots, a_n nenegativni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$1 + (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \prod_{1 \leq i \leq n} (1 + a_i)^{1/n}$$

Zadatak 8. Postoji li padajuća funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$f(f(x)) = x^3 - 5x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 9. Pronađite sve konačne skupove $S \subseteq \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju sljedeće svojstvo: za sve $a, b \in S$ je i $2a - b \in S$.

Zadatak 10. Nađite sve prirodne brojeve $k > 1$ za koje postoje različiti $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da se $k^a + 1$ i $k^b + 1$ mogu dobiti jedan iz drugoga okretanjem poretka znamenki u dekadskom zapisu (ne smiju se dodavati vodeće nule).

Eventualna pitanja u vezi formulacije zadataka možete poslati na adresu dmf.matematika@gmail.com.