

Diofantski problemi sa sumama djelitelja

dr. sc. Sanda Bujačić,
Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci

Na predavanju je predstavljeno nekoliko matematičkih problema čija je zajednička poveznica funkcija sume pozitivnih djelitelja prirodnog broja n , $\sigma(n)$. Promatrani problemi su karakteristični za teoriju brojeva, a njihovo rješavanje se oslanja na predstavljanje problema putem diofantskih jednadžbi i rješavanje istih.

Neka je n neparan prirodan broj te neka d_1, d_2 dijele $\frac{n^2+1}{2}$ pri čemu vrijedi

$$d_1 + d_2 = \delta n + \varepsilon,$$

gdje su δ i ε cijeli brojevi te je $\delta > 0$. Promatramo parne brojeve δ, ε , odnosno slučaj kad je $\delta \equiv 0 \pmod{4}$ i $\varepsilon \equiv 2 \pmod{4}$ te slučaj kad je $\delta \equiv 2 \pmod{4}$ i $\varepsilon \equiv 0 \pmod{4}$. Dokazujemo da za $\varepsilon \equiv 0 \pmod{4}$ postoji beskonačno mnogo neparanih prirodnih brojeva n s djeliteljima d_1 i d_2 od $\frac{n^2+1}{2}$ za koje

$$d_1 + d_2 = 2n + \varepsilon$$

te analogan rezultat za $\varepsilon \equiv 2 \pmod{4}$ i djelitelje za koje je

$$d_1 + d_2 = 4n + \varepsilon.$$

Ove rezultate poopćavamo i pokazujemo da postoji beskonačno mnogo neparanih prirodnih brojeva n navedenog svojstva u slučajevima $(\delta, \varepsilon) = (\delta, \delta + 2), (\delta, \delta - 2)$.

Predavanje zaključujemo razradom i rješavanjem varijacije Subbaraove kongruencije. Pokazujemo da su jedina rješenja kongruencije oblika

$$n \cdot \varphi(n) \equiv 2 \pmod{\sigma(n)},$$

gdje je $\varphi(n)$ Eulerova funkcija prirodnog broja n , za

$$n = 2^a \cdot 5^b, \quad a, b \geq 0,$$

brojevi $n = 1, 2, 5, 8$.